

巧解三角函数周期题

■卢湾高级中学数学高级教师 赵杨柳

三角函数的周期是三角函数的一个重要性质,也是高考的热点,让我们通过几个实例来了解一下解三角函数周期的几种常用方法。

利用公式求周期

【例1】函数 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$ 的最小正周期是()

A. π B. 2π C. -4π D. 4π

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 4\pi$$

【解】由公式,得 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$,故选D。

【点评】对于函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

或 $y = A \cos(\omega x + \phi)$ 可直接利用公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 求得;对于 $y = A \tan(\omega x + \phi)$ 或 $y = A \cot(\omega x + \phi)$ 可直接利用公式 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ 求得。

【例2】求下列函数的周期:

$$\textcircled{1} f(x) = \sin x \cos x \quad \textcircled{2} f(x) = \cos^2 x$$

$$\textcircled{3} y = 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 5 \cos^2 x$$

【分析】利用三角恒等式对函数进行恒等变形,转化为一个角的一个三角函数的形式,再求周期。

【解】 $\textcircled{1} f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; 所以周期

$$\text{为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\textcircled{2} f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \text{ 所以周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \therefore y &= 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \\ &= 3 - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 3 - \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 \\ &= 4 + 2(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x) = 4 + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \\ \therefore y &= 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \text{ 的周期} \\ \text{为 } T &= \frac{2\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

【点评】就是先根据三角公式将已知式转化为一个角的一个三角函数的形式,再利用公式去求。这是最常见的求周期题型,也是高考考查的热点。

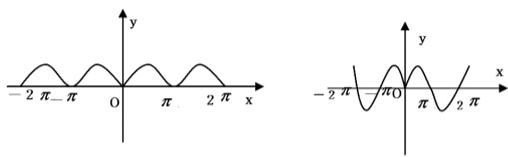
利用图像求周期

【例3】求下列函数的最小正周期:

$$\textcircled{1} y = |\sin x| \quad \textcircled{2} y = \sin|x| \quad \textcircled{3} y = |\tan x|$$

【解】分别作出函数的图像知

$\textcircled{1} y = |\sin x|$ 的周期 $T = \pi$ $\textcircled{2} y = \sin|x|$ 不是周期函数 $\textcircled{3} y = |\tan x|$ 的周期 $T = \pi$



【点评】对于一些含有绝对值的三角函数周期问题,常可借助于三角函数的图像来解决。

利用定义求周期

【例4】求函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期。

$$\text{【解】} \because \left| \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \right| + \left| \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \right| = |\sin x| + |\cos x| \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\therefore \frac{k\pi}{2}$ 是函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的周期,显然

$$\frac{k\pi}{2} \text{ 中最小者是 } \frac{\pi}{2}$$

下面证明 $\frac{\pi}{2}$ 是最小正周期:

假设 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期,则存在

$0 < T < \frac{\pi}{2}$, 使得:

$$f(x+T) = |\sin(x+T)| + |\cos(x+T)| = |\sin x| + |\cos x| \text{ 对 } x \in \mathbb{R} \text{ 恒成立,}$$

令 $x=0$, 则 $f(0+T) = |\sin T| + |\cos T| = \sin T + \cos T = \sin 0 + \cos 0 = 1$

$$\text{但 } 0 < T < \frac{\pi}{2}, \therefore \sin T + \cos T > 1 \textcircled{2}$$

$\therefore \textcircled{1}$ 与 $\textcircled{2}$ 矛盾, \therefore 假设不成立, $\therefore \frac{\pi}{2}$ 是 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期。

【点评】这种方法依据周期函数的定义,从式子 $f(x+T) = f(x)$ 出发,设法找出周期 T 中的最小正数(须用反证法证明)。注意式子 $f(x+T) = f(x)$ 要对在定义域内的任意 x 恒成立,如因为 $\sin(\frac{7}{6}\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{7}{6}\pi$,

所以 $\frac{2\pi}{3}$ 是 $y = \sin x$ 的周期,对吗?是不对的,因为

它只是对 $x = \frac{7}{6}\pi$ 成立,如 $\sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{2\pi}{3}) \neq \sin \frac{1}{2}\pi$, 所以 $\frac{2\pi}{3}$ 不是 $y = \sin x$ 的周期,而要对 $\sin(x + \frac{2\pi}{3}) = \sin x$ 成立。

【例5】已知函数 $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{2}x)$, 则使 $f(x+c) = f(x)$ 恒成立的最小正数 $c =$ _____。

【解】由 $f(x+c) = f(x)$ 知; c 是函数 $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{2}x)$ 的最小正周期, $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{2}x) = \frac{1 + \cos \pi x}{2}, T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ 所以 $c = 2$ 。

运用周期求值

【例6】设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $f(x+2) = -f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(7.5)$ 等于()

A. 0.5 B. -0.5 C. 1.5 D. -1.5

【解析】由 $f(x+2) = -f(x) \Rightarrow f(7.5) = -f(5.5) = f(3.5) = -f(1.5) = f(-0.5)$,

又 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-0.5) = -f(0.5) = -0.5$, 故选择B。

【点评】周期函数的函数值具有周期变化, 即 $f(x+T) = f(x), f(x+2T) = f(x), f(x+3T) = f(x), \dots, f(x+nT) = f(x)$ 等。

释放改革红利 支撑新型城镇化

■交大附中政治高级教师 蒋敏然

事件回顾: 3月27日至29日, 中共中央政治局常委、国务院总理李克强先后到江苏、上海深入了解情况, 听取意见。他高度重视农业发展与改革, 提出要通过发展现代农业固本强基, 有序释放城镇化的内需潜力, 能够就地就近聚集人口, 吸纳就业; 要因地制宜, 尊重农民意愿, 保护农民权益。在扩大开放中增强竞争动力和压力, 进一步释放改革红利。勉励上海积累经验, 推动完善开放型经济的体制机制。

相关知识要点:

经济常识: $\textcircled{1}$ 社会主义市场经济需要国家的宏观调控。李总理的指示有助于实现社会公平和共同富裕的目标。 $\textcircled{2}$ 农业是国民经济的基础, 是人类衣食之源、生存之本, 农业的发展关系到13亿人口的吃饭问题, 必须加强和巩固农业的地

位。我国农业基础薄弱。农村发展滞后的局面未有根本改变, 政府必须把坚持发展现代农业、繁荣农村经济作为首要任务, 走中国特色农业现代化道路。因此总理必然高度重视农业发展与改革, 要求通过发展现代农业“固本强基”。 $\textcircled{3}$ 农业生产力提高可以为国民经济其他部门提供剩余劳动力, 有助于城镇化进程。 $\textcircled{4}$ 消费是生产的动力, 对生产有动力功能。城镇化导致自给性消费减少, 商品性消费增加, 从而拉动内需, 促进当地经济发展。 $\textcircled{5}$ 经济发展能够进一步带动就业, 增加农民收入, 提高消费能力, 促进生产。农村城镇化有利于农村经济良性、可持续发展。 $\textcircled{6}$ 现代市场经济是全球化经济, 全球化上海带来机遇和挑战。有助于上海全面地了解世界上各种经济体制的优点和缺点, 为我国经济体制改革

提供更多的借鉴和选择。 $\textcircled{7}$ 发展是硬道理。只有发展才能解决改革中的问题, 缩小城乡差别、区域差别, 实现社会主义根本目的, “释放改革红利”, 共享改革成果。

政治常识: $\textcircled{1}$ 中国共产党是领导我们事业的核心力量。中共中央政治局领导考察苏沪两地指导经济建设, 保证了社会主义现代化建设的发展方向。 $\textcircled{2}$ 中国共产党的宗旨是全心全意为人民服务, 坚持科学发展观, 以人为本。必然要求“尊重农民意愿, 保护农民权益”。 $\textcircled{3}$ 作为政府总理, 有执政为民的责任。组织和领导社会主义现代化建设是现阶段的最主要职能。 $\textcircled{4}$ 总理深入苏、沪地区农村、工厂考察, 了解情况, 调查研究, 是科学执政、民主执政的客观要求。

哲学常识: $\textcircled{1}$ 辩证唯物主义首要

的、基本的观点是物质决定意识。这就要求我们做任何事情必须一切从实际出发。党和国家领导人深入基层进行实地调查, 是坚持马克思主义唯物主义的根方法。 $\textcircled{2}$ 辩证法认为: 矛盾既有普遍性又有特殊性, 不同地区的农村改革应区别对待, “因地制宜”、“尊重农民意愿”是具体情况具体分析的具体表现。 $\textcircled{3}$ 社会实践是人民群众的实践, 人民是历史的创造者, 是社会实践的主体。尊重实践和尊重人民群众密不可分。因此党和政府必须“尊重农民意愿, 保护农民权益”。 $\textcircled{4}$ 任何事物的发展都要经历量变到质变的发展过程。量变是质变的必要准备, 质变是量变的必然结果。完善开放型经济的体制机制也要不断积累经验, 由点到面, 从上海试点推广到其他地方, 以保证改革的顺利推进。