

排列应用题的常用技巧

■卢湾高级中学数学高级教师 赵杨柳

解排列问题,首先必须认真审题,明确问题是否是排列问题,其次是抓住问题的本质特征,灵活运用基本原理和公式进行分析解答,同时,还要注意讲究一些基本策略和方法技巧,使一些看似复杂的问题迎刃而解。

总的原则:合理分类和准确分步

解排列(或)组合问题,应按元素的性质进行分类,按事情发生的连续过程分步,做到分类标准明确,分步层次清楚,不重不漏。

【例1】 6个同学和2个老师排成一排照相,2个老师站中间,学生甲不站排头,学生乙不站排尾,共有多少种不同的排法?

【分析】 先安排甲,按照要求对其进行分类,分两类:

①若甲在排尾上,则剩下的5人可自由安排,有 P_5^5 种方法,老师有 P_2^2 种,则共有 $P_5^5 P_4^4 P_2^2$ 种。

②若甲在第2、3、6、7位,则排尾的排法有 P_4^4 种,1位的排法有 P_4^4 种。

第2、3、6、7位的排法有 P_4^4 种,根据分步计数原理,再安排老师,有 P_2^2 种方法。根据分步及分类计数原理,不同的站法共有 $P_2^2 P_4^4 P_4^4 P_4^4$ 。

根据分类计数原理,不同的站法共有 $P_5^5 P_4^4 P_4^4 P_2^2 + P_2^2 P_4^4 P_4^4 P_4^4 = 1008$ (种)

【点评】 分类的原则是,互相干扰的要分类。例1中甲排尾与不排尾对乙的排法有影响,所以对甲分类。

不同题型的解题技巧

一、特殊元素(位置)“优先法”

对于特殊元素的排列组合问题,一般应先考虑特殊元素,再考虑其他元素。

【例2】 甲、乙、丙、丁、戊5名同学进行某种劳动技术比赛,决出了第1到第5名的名次。甲、乙两名参赛者去询问成绩,回答者对甲说:“很遗憾,你和乙都未拿到冠军。”对乙说:“你当然不会是最差的。”从这个回答分析,5人的名次排列共可能有多少种不同的情况?(用数字作答)

【解】 本题等价于5人排成一排,甲、乙都不站在排头且乙不站在排尾的排法有多少种。乙的限制最多,特殊的元素优先排列,故先排乙,有3种情况;再排甲,也有3种情况;余下3人有 P_3^3 种排法。

故共有 $3 \cdot 3 \cdot P_3^3 = 54$ 种不同的情况。

【点评】 对于要求比较多的特殊元素(或位置),要优先考虑,如例2中的乙。

二、总体淘汰“排除法”

对于含有否定词语的问题,还可以从总体中把不符合要求的减去,此时应注意既不能多减又不能少减。

【例3】 用0,1,2,3,4这五个数,组成没有重复数字的三位数,其中1不在个位的数共有_____种。

【分析】 五个数组成三位数的全排列有 P_5^3 个,0排在首位的有 P_4^2 个,1排在末尾的有 P_4^2 个,减掉这两种不合条件的排法数,再加回百位为0同时个位为1的排列数 P_3^1 (为什么?)故共有 $P_5^3 - 2P_4^2 + P_3^1 = 39$ (种)。

【点评】 若n个不同的元素排m个位,a,b各不能排某位,则有 $P_n^m - 2P_{n-1}^{m-1} + P_{n-2}^{m-2}$ 种排法。

三、相邻问题“捆绑法”

对于某几个元素要求相邻的排列问题,可先将相邻的元素“捆绑”在一起,看作一个“大”的元(组),与其他元素排列,然后再对相邻的元素(组)内部进行排列(松绑)。

【例4】 7人站成一排照相,要求甲、乙、丙三人相邻,分别有多少种站法?

【分析】 先将甲、乙、丙三人捆绑在一起看作一个元素,与其余4人共有5个元素做全排列,有 P_5^5 种排法,然后对甲、乙、丙三人进行全排列 P_3^3 。

则共有 $P_5^5 P_3^3 = 720$ 种排法。

【点评】 对于要求相邻的问题,可把相邻的元素“捆绑”看成一个,还要注意最后是否要“松绑”,若三个连续的空座位就无需“松绑”。

四、不相邻问题“插空法”

对于某几个元素不相邻的排列问题,可先将其他元素排好,然后再将不相邻的元素在已排好的元素之间及两端的空隙之间插入即可。

【例5】 7人站成一排照相,要求甲、乙、丙三人不相邻,分别有多少种站法?

【分析】 可先让其余4人站好,共有 P_4^4 种排法,再在这4人之间及两端的5个“空隙”中选三个位置让甲、乙、丙插入,则有 P_5^3 种方法,这样共有 $P_4^4 P_5^3$ 种不同的排法。

五、顺序固定用“除法”

对于某几个元素顺序一定的排列问题,可先将这几个元素与其他元素一同进行排列,然后用总的排列数除以这几个元素的全排列数。

【例6】 有4名男生,3名女生。3名女生高矮互不等,将7名学生排成一行,要求从左到右,女生从矮到高排列,有多少种排法?

【分析】 先在7个位置上作全排列,有 P_7^7 种排法。其中3个女生因要求“从矮到高”排,只有一种顺序,故 P_3^3 只对应一种排法,所以共有 $\frac{P_7^7}{P_3^3} = P_7^4$ (种)。

六、分排问题用“直排法”

把n个元素排成若干排的问题,若没有其他的特殊要求,可采用统一排成一排的方法来处理。

【例7】 七人坐两排座位,第一排坐3人,第二排坐4人,则有多少种不同的坐法?

【分析】 7个人,可以在前后排随意就坐,再无其他限制条件,故两排可看作一排处理,所以不同的坐法有 $P_7^7 = P_3^3 P_4^4$ (种)。

七、实验法即“枚举法”

题中附加条件增多,直接解决困难时,用实验逐步寻求规律有时也是行之有效的办法。

【例8】 将数字1,2,3,4填入标号为1,2,3,4的四个方格内,每个方格填1个,则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法种数有()。

A.6 B.9 C.11 D.23

【分析】 此题考查排列的定义,由于附加

条件较多,解法较为困难,可用实验法逐步解决。

第一方格内可填2或3或4。如填2,则第二方格中内可填1或3或4。

若第二方格内填1,则第三方格只能填4,第四方格应填3。

若第二方格内填3,则第三方格只能填4,第四方格应填1。

同理,若第二方格内填4,则第三方格只能填1,第四方格应填3。因而,第一格填2有3种方法。

不难得到,当第一格填3或4时也各有3种,所以共有9种。

【点评】 例8实际上是全错位排列,由枚举法可知;两个元素的全错位排列是1种,三个元素的全错位排列是2种,四个元素的全错位排列是9种,五个元素的全错位排列是25种等等。

八、允许重复排列“住店法”

解决“允许重复排列问题”要注意区分两类元素:一类元素可以重复,另一类不能重复,把不能重复的元素看作“客”,能重复的元素看作“店”,再利用乘法原理直接求解。

【例9】 七名学生争夺五项冠军,每项冠军只能由一人获得,获得冠军的可能的种数有()。

A. 7^5 B. 5^7 C. P_7^5 D. C_7^5

【分析】 因同一学生可以同时夺得n项冠军,故学生可重复排列,将7名学生看作7家“店”,5项冠军看作5名“客”,每个“客”有7种住宿法,由乘法原理得 7^5 种。

【点评】 对此类问题,常有疑惑,为什么不是 5^7 呢?用分步计数原理看,5是步骤数,自然是指数。

自我检测:

(1)0,1,2,3,4,5可组成多少个无重复数字的五位偶数?

(2)从10个不同的文艺节目中选6个编成一个节目单,如果某女演员的独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上,则共有多少种不同的排法?

(3)用间接法解例:“6个同学和2个老师排成一排照相,2个老师站中间,学生甲不站排头,学生乙不站排尾,共有多少种不同的排法?”

(4)五种不同商品在货架上排成一排,其中A、B两种必须连排,而C、D两种不能连排,则不同的排法共有_____种。

(5)书架上有3本不同的书,如果保持这些书的相对顺序不变,再放上2本不同的书,有_____种不同的放法?

(6)八个人排成两排,有几种不同排法?

(7)4位同学各拿出一张纪念卡互相交换,每人当然不能拿自己的卡,有多少种不同的交换结果?

(8)5名学生去听在同一时间进行的4个课外知识讲座,每名学生可以自由选择听4个讲座中的一个讲座,不同选择的种数是_____。

答案:

(1) $P_5^4 + P_2^1 P_4^1 P_4^1 = 312$ (种);(2) $P_9^1 P_9^5 = 136080$;
(3) $(P_6^6 - 2P_5^5 + P_4^4) = 1008$ (种);(4)24;(5) $\frac{P_5^5}{P_3^3} = P_5^2 = 20$
(种);(6) P_8^8 ;(7)9;(8) 4^5 。